

Matemática Atuarial II

AULA-3

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Introdução

- Ao longo do curso de Matemática Atuarial I a teoria foi desenvolvida considerando apenas a vida de uma única pessoa.
- No entanto, a maioria dos produtos atuariais do ramo vida (podem envolver) envolvem mais de uma vida.
- Planos de previdência que são revertidos em pensão
- Seguros (considerando a vida do beneficiário)
- ...

Vetor aleatório

Diferentes fatores observados na mesma unidade amostral ou então o mesmo fator em unidades amostrais diferentes

Definição: Vetor aleatório (variável aleatória multidimensional ou variável aleatória multivariada) *Sejam $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade, então $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ é um vetor aleatório.*

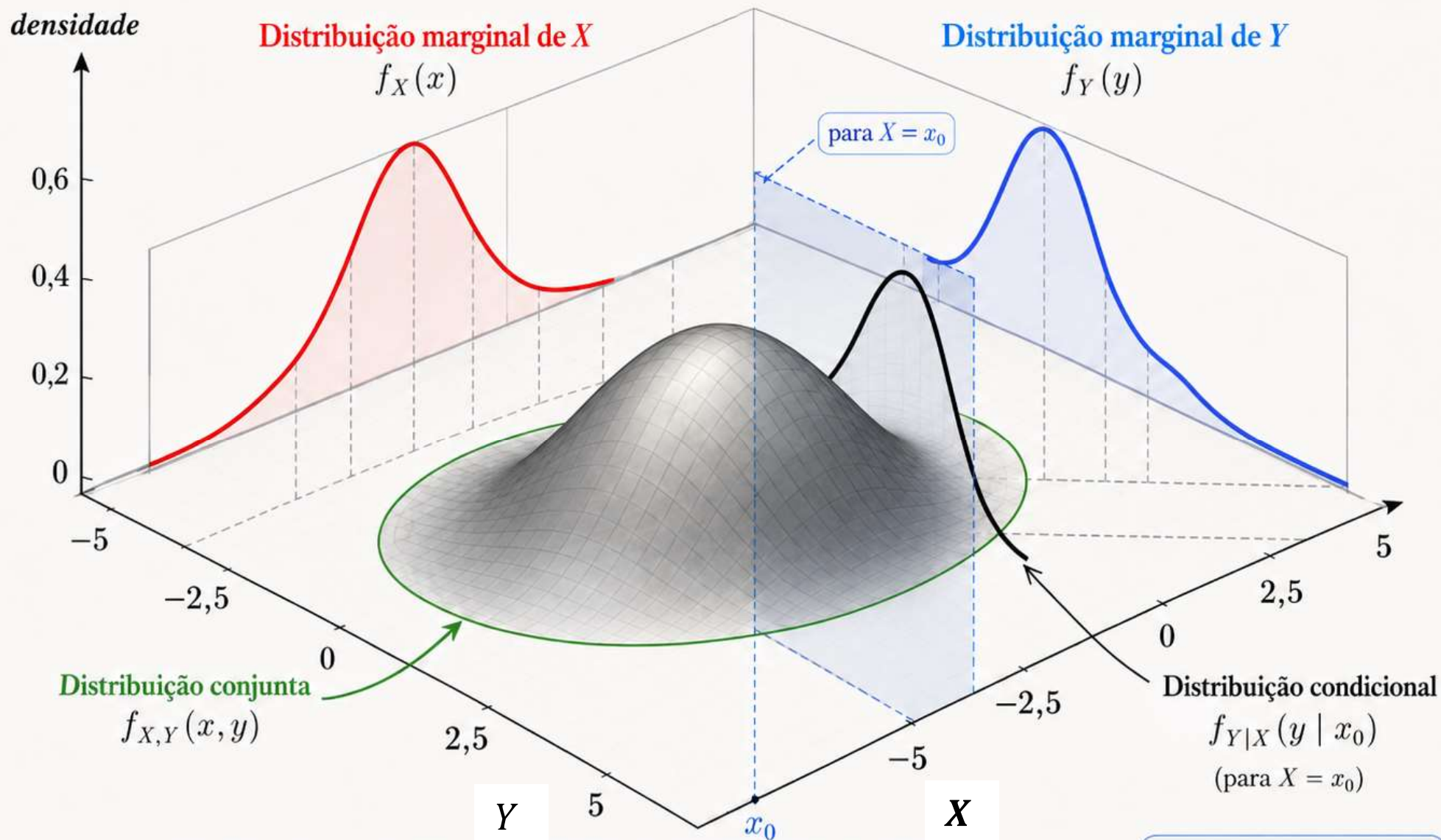
Vetor aleatório

Ao se trabalhar com vetores aleatórios, surge a noção de três tipos de modelos probabilísticos.

- A distribuição conjunta: Descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.
- A distribuição marginal: Descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.
- A distribuição condicional: Descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.

Distribuições Bivariadas

Relação entre a distribuição conjunta, as distribuições marginais e a distribuição condicional.



- Distribuição conjunta $f_{X,Y}(x,y)$: descreve a densidade de probabilidade simultânea de (X,Y) .
- Distribuições marginais: são obtidas projetando a distribuição conjunta sobre um dos eixos.
- Distribuição condicional $f_{Y|X}(y | x_0)$: é a distribuição de Y dado que $X = x_0$ (seção vertical da conjunta).

Resumo

- Marginais: $f_X(x)$ e $f_Y(y)$
- Conjunta: $f_{X,Y}(x,y)$
- Condicional: $f_{Y|X}(y | x_0)$

Variável aleatória discreta bidimensional

Definição: (Variável aleatória discreta bidimensional) *Seja a variável aleatória $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, onde X_1 e X_2 são duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Então $\mathbf{X}$ é uma variável aleatória bidimensional e a função de probabilidade conjunta $P_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ definida para cada par (x_1, x_2) é dada por:*

$$P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

em que $P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \geq 0$ para todo (x, y) e $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P(x_{1i}, x_{2j}) = 1$

.

Variável aleatória contínua bidimensional

Definição: (Variável aleatória contínua bidimensional) Seja a variável aleatória $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, onde X_1 e X_2 são duas variáveis aleatórias contínuas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Então $\mathbf{X}$ é uma variável aleatória bidimensional. A função de densidade conjunta $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ definida para cada par (x_1, x_2) é :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) > 0 \text{ para todo } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}.$$

em que $\int \int f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

EXEMPLO 1: Considere duas pessoas cujo tempo de vida adicional pode ser modelado pela distribuição de probabilidade expressa na tabela abaixo:

$X \rightarrow$ Tempo de vida adicional da pessoa 1.

$Y \rightarrow$ Tempo de vida adicional da pessoa 2.

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

Observe que $\sum \sum P(x, y) = \sum P(x) = \sum P(y) = 1$

Função de distribuição Conjunta

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \dots, Y_n \leq y_n)$$

- $F(-\infty, y_2, \dots, y_n) = F(y_1, -\infty, \dots, y_n) = F(y_1, y_2, \dots, -\infty) = 0$
- $F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$
- F é não-decrescente e contínua à direita, com respeito a cada um dos eixos associados a $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$
- F é tal que, para $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$ sendo $a_i < b_i$ e $1 \leq i \leq n$ então:

$$P(a_1 < Y_1 \leq b_1, a_2 < Y_2 \leq b_2, \dots, a_n < Y_n \leq b_n) \geq 0$$

EXEMPLO 2: Sejam dois indivíduos, cujo tempo de vida adicional para cada um possa ser representado pelas variáveis aleatórias T_x e T_y , respectivamente. Considere ainda que T_x e T_y possam ser modelados pela seguinte função distribuição de densidade conjunta:

$$f_{T_x, T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0006(t - s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $F_{T_x}(t)$ e $F_{T_x, T_y}(t, s)$.

EXEMPLO 2: Calcule $F_{T_x}(t)$

$$f_{T_x}(t) = \int_0^{10} f_{T_x, T_y}(t, s) ds = 0,0006 \left(t^2 s - \frac{2ts^2}{2} + \frac{s^3}{3} \right) \Bigg|_{s=0}^{s=10}$$

$$f_{T_x}(t) = 0,002(3t^2 - 30t + 100), \quad 0 < t < 10$$

$$F_{T_x}(t) = \int_0^t f_{T_x}(u) du = 0,002 (u^3 - 15u^2 + 100u) \Bigg|_{u=0}^{u=t}$$

$$F_{T_x}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 0,002(t^3 - 15t^2 + 100t), & 0 < t \leq 10 \\ 1, & t > 10 \end{cases}$$

EXEMPLO 2: Calcule $F_{T_x T_y}(t, s)$

$$F_{T_x, T_y}(t, s) = \int_0^t \int_0^s f_{T_x, T_y}(u, v) dv du = \int_0^t 0,0006 \left[u^2 v - uv^2 + \frac{v^3}{3} \right]_{v=0}^{v=s} du$$

$$F_{T_x, T_y}(t, s) = \int_0^t 0,0006 \left(u^2 s - us^2 + \frac{s^3}{3} \right) du$$

$$F_{T_x, T_y}(t, s) = 0,0006 \left[\frac{u^3}{3} s - \frac{u^2}{2} s^2 + \frac{s^3}{3} u \right]_{u=0}^{u=t}$$

$$F_{T_x, T_y}(t, s) = 0,0006 \left(\frac{t^3 s}{3} - \frac{t^2 s^2}{2} + \frac{s^3 t}{3} \right)$$

$$F_{T_x, T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0001(2t^3 s - 3t^2 s^2 + 2s^3 t), & 0 < s \leq 10, 0 < t \leq 10 \\ 0,001(200s - 30s^2 + 2s^3), & 0 < s \leq 10, t > 10, \\ 0,001(2t^3 - 30t^2 + 200t), & s > 10, 0 < t \leq 10. \\ 1, & s > 10, t > 10. \end{cases}$$

EXEMPLO 2: Lembrando que $F_{T_x, T_y}(t, 10) = F_{T_x}(t)$, assim:

$$F_{T_x}(t) = 0,0001(2t^3 10 - 3t^2 100 + 2t 1000)$$

$$F_{T_x}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 0,001(2t^3 - 30t^2 + 200t), & 0 < t \leq 10 \\ 1, & t > 10 \end{cases}$$

Variável aleatória bidimensional

Como no caso unidimensional, a função de sobrevivência também está presente para os modelos conjuntos. Assim dado o vetor aleatório (T_x, T_y) , então:

$$S_{T_x, T_y}(t, s) = 1 - F_{T_x, T_y}(t, s) = P(T_x > t, T_y > s)$$

EXEMPLO 4: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y , tal que:

$$f_{T_x T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0004(10 - t)(10 - s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a função acumulada conjunta e a função de sobrevivência conjunta.

EXEMPLO 4:

$$f_{T_x T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0004(10 - t)(10 - s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F_{T_x T_y}(t, s) = \int_0^t \int_0^s 0,0004(10 - u)(10 - v) dv du$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_x T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0004(10 - t)(10 - s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F_{T_x T_y}(t, s) = \int_0^t \int_0^s 0,0004(10 - u)(10 - v) dv du$$

$$F_{T_x T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,04(s - 0,05s^2)(t - 0,05t^2), & 0 < s \leq 10, 0 < t \leq 10, \\ 0,2(s - 0,05s^2) & 0 < s \leq 10, t > 10 \\ 0,2(t - 0,05t^2), & s > 10, 0 < t \leq 10 \\ 1 & s \geq 10, t \geq 10 \end{cases}$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_x T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0004(10 - t)(10 - s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$S_{T_x T_y}(t, s) = \int_t^{10} \int_s^{10} f_{T_x, T_y}(u, v) dv du$$

EXEMPLO 4:

$$f_{T_x T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0004(10 - t)(10 - s), & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$S_{T_x T_y}(t, s) = \int_t^{10} \int_s^{10} f_{T_x, T_y}(u, v) dv du$$

$$S_{T_x, T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0001(10 - s)^2(10 - t)^2, & 0 < s \leq 10, 0 < t \leq 10, \\ 0,01(10 - s)^2 & 0 < s \leq 10, t < 0 \\ 0,01(10 - t)^2 & s < 0, 0 < t \leq 10 \\ 0 & s \geq 10, t \geq 10 \end{cases}$$

Valor esperado - Variável aleatória bidimensional

Seja (X_1, X_2) um vetor de bidimensional. A esperança ou valor esperado da função $g(x_1, x_2)$, denotada por $E[g(X_1, X_2)]$ é definida por:

$$E[g(X_1, X_2)] = \sum \sum g(x_1, x_2) P(x_1, x_2),$$

se as variáveis são discretas

$$E[g(X_1, X_2)] = \int \int g(x_1, x_2) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

se as variáveis são contínuas.

EXEMPLO 5: Calcule o valor esperado de $g(T_x, T_y) = T_x T_y$ tal que:

$$f_{T_x, T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Resp:

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} \int_0^{10} st \, 0,0006(t-s)^2 ds \, dt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t \, 0,0006 \int_0^{10} t^2 s - 2ts^2 + s^3 \, ds \, dt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t \, 0,0006 \left[\frac{t^2 s^2}{2} - \frac{2ts^3}{3} + \frac{s^4}{4} \right]_{s=0}^{s=10} dt$$

EXEMPLO 5:

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t 0,0006 \left(t^2 50 - \frac{2000t}{3} + 2500 \right) dt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \int_0^{10} t^3 0,03 - t^2 0,4 + t 1,5 dt$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \left[\frac{t^4 0,03}{4} - \frac{t^3 0,4}{3} + \frac{t^2 1,5}{2} \right]_{t=0}^{t=10} = 75 - \frac{400}{3} + 75$$

$$E[g(T_x, T_y)] = \frac{50}{3}$$

Distribuição condicional-Variável aleatória bidimensional

Função probabilidade de X_1 dado X_2 , em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias discretas

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)}$$

Função densidade de X_1 dado X_2 , em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias contínuas

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}, \quad f_{X_2}(x_2) > 0$$

Independência de variáveis aleatórias

A independência permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: Independência entre variáveis aleatórias.

Duas variáveis aleatórias, X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.

Independência de variáveis aleatórias

- Para as variáveis aleatórias discretas,

$$P(X = x|Y = y) = P(X = x)$$

$$P_{X,Y}(x, y) = P(X = x|Y = y)P(Y = y)$$

X, Y independentes $\Leftrightarrow P_{X,Y}(x, y) \equiv P_X(x)P_Y(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Para as variáveis aleatórias contínuas,

$$f_{X|Y}(X|Y) = f_X(x)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$$

X, Y independentes $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x, y) \equiv f_X(x)f_Y(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Independência de variáveis aleatórias

- Para as variáveis aleatórias discretas,

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow P_{X,Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv P_X(\mathbf{x})P_Y(\mathbf{y}), \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2.$$

- Para as variáveis aleatórias contínuas,

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow f_{X,Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv f_X(\mathbf{x})f_Y(\mathbf{y}), \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2$$

$$F_{X,Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv F_X(\mathbf{x})F_Y(\mathbf{y})$$

$$S_{X,Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv S_X(\mathbf{x})S_Y(\mathbf{y})$$

EXEMPLO 6: Determine se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sendo que:

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

EXEMPLO 6: Determine se as variáveis aleatórias X e Y são independentes, sendo que:

Y/X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

EXEMPLO 7: Seja o tempo de vida futuro T_{45} e T_{50} independentes, obtenha as expressões pedidas:

- a) A probabilidade de que ambos vivam pelo menos mais 10 anos.
- b) A probabilidade de que ao menos um esteja morto ao fim de 30 anos.
- c) A probabilidade de que ambos alcancem a idade de 60 anos.
- d) A probabilidade de que um faleça antes de alcançar 65 anos e de que o outro faleça exatamente 40 anos após a data 0.

EXEMPLO 7:

a) A probabilidade de que ambos vivam pelo menos mais 10 anos.

$$S_{T_{45}T_{50}}(10,10) = S_{T_{45}}(10)S_{T_{50}}(10) = {}_{10}p_{45} {}_{10}p_{50}$$

b) A probabilidade de que ao menos um esteja morto ao fim de 30 anos.

$$P(T_{45} \leq 30 \text{ ou } T_{50} \leq 30) = P(T_{45} \leq 30) + P(T_{50} \leq 30) - P(T_{45} \leq 30 \text{ e } T_{50} \leq 30)$$

$$P(T_{45} \leq 30 \text{ ou } T_{50} \leq 30) = {}_{30}q_{45} + {}_{30}q_{50} - {}_{30}q_{45} {}_{30}q_{50}$$

EXEMPLO 7:

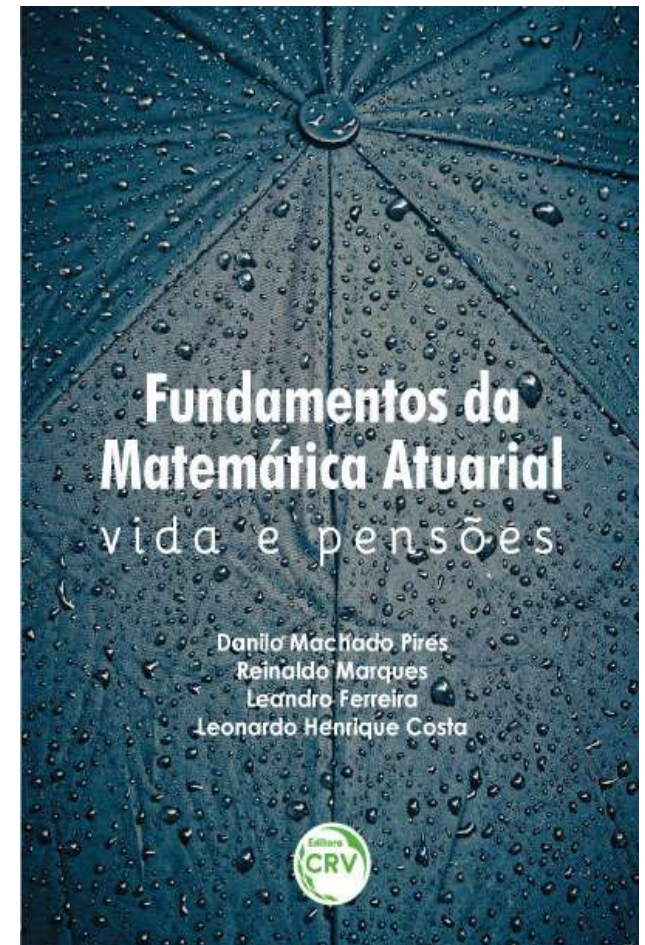
c) A probabilidade de que ambos alcancem a idade de 60 anos.

$$P(T_{45} > 15 \text{ e } T_{50} > 10) = S_{T_{45}}(15)S_{T_{50}}(10) = {}_{15}p_{45} {}_{10}p_{50}$$

d) A probabilidade de que um faleça antes de alcançar 65 anos e de que o outro faleça exatamente com 40 anos após a data 0.

$$\begin{aligned} &P[(T_{45} \leq 20 \text{ e } T_{50} = 40) \text{ ou } (T_{45} = 40 \text{ e } T_{50} \leq 15)] \\ &= P[(T_{45} \leq 20 \text{ e } T_{50} = 40)] + P[(T_{45} = 40 \text{ e } T_{50} \leq 15)] \\ &= P(T_{45} \leq 20)P(T_{50} = 40) + P(T_{50} \leq 15)P(T_{45} = 40) \\ &= {}_{20}q_{45} [{}_{40}p_{50}q_{90}] + {}_{15}q_{50} [{}_{40}p_{45}q_{85}] \end{aligned}$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019 .
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.



Matemática Atuarial II

AULA-4

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

Créditos: Leonardo Henrique Costa; leonardo.costa@unifal-mg.edu.br

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

São ferramentas importantes da inferência quando se tem interesse no estudo de valores extremos e quantis (ou funções destes).

Considere o vetor aleatório n –dimensional $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ é então possível definir:

$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

e

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

Cujos valores assumidos são os valores extremos dentre as n variáveis.

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

Para o caso em que $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ sejam independentes, então:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(x)]$$

e

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{i=1}^n [F_{X_i}(x)]$$

Demonstração:

Se $P(X_{(1)} > x)$ então $P(X_1 > x, X_2 > x, X_3 > x, \dots, X_n > x)$, assim:

$$P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x)P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(x)]$$

Se $P(X_{(n)} \leq x)$ então $P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x, \dots, X_n \leq x)$, assim:

$$P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \dots P(X_n \leq x)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{i=1}^n [F_{X_i}(x)]$$

Estatísticas de ordem: Distribuição do mínimo e do máximo

Para o caso em que $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ sejam independentes e identicamente distribuídas, temos:

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n$$

e

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n$$

EXEMPLO 1: Considere um seguro de vida feito por um grupo de 4 pessoas de mesma idade e mesmo sexo, **em que o benefício somente será pago caso todas as pessoas venham a falecer.** Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada um dos membros desse grupo seja modelado pela variável aleatória $Y_i, i = 1, 2, 3, 4$ e que sejam independentes e identicamente distribuídas, tal que $Y_i \sim \text{Exp}(0,02)$.

Solução

EXEMPLO 1: Considere um seguro de vida feito por um grupo de 4 pessoas de mesma idade e mesmo sexo, **em que o benefício somente será pago caso todas as pessoas venham a falecer.** Calcule a probabilidade desse seguro ser pago antes de 10 anos após o contrato. Suponha que o tempo de vida adicional de cada um dos membros desse grupo seja modelado pela variável aleatória $Y_i, i = 1, 2, 3, 4$ e que sejam independentes e identicamente distribuídas, tal que $Y_i \sim \text{Exp}(0,02)$.

Solução

$$F_{Y_{(n)}}(10) = P(Y_{(n)} \leq 10) = \prod_{i=1}^4 [F_{X_i}(10)]$$
$$F_{Y_{(n)}} = (1 - e^{-10 \times 0,02})^4 \approx 0,107\%$$

EXEMPLO 2: Refaça o exemplo 1 porém considere que o seguro é pago assim que a primeira pessoa do grupo vir a óbito.

Solução

EXEMPLO 2: Refaça o exemplo 1 porém considere que o seguro é pago assim que a primeira pessoa do grupo vir a óbito.

Solução

$$F_{Y_{(1)}}(10) = P(Y_{(1)} \leq 10) = 1 - \prod_{i=1}^4 [1 - F_{X_i}(10)]$$

$$F_{Y_{(1)}}(10) = 1 - (e^{-10 \times 0,02})^4 \approx 55,06\%$$

COVARIÂNCIA

- A covariância é o valor esperado do produto dos desvios de cada variável em relação às suas médias.
- Medida de “intensidade” da dependência *linear* entre as variáveis e pode assumir valores de qualquer sinal.
 - Quando duas variáveis aleatórias X e Y são dependentes, geralmente é de interesse avaliar quão fortemente estão relacionadas uma com a outra.

COVARIÂNCIA

A covariância entre as variáveis aleatórias X e Y (num mesmo espaço de probabilidades) é dada por:

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

ou

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Em sua forma usual é uma medida somente entre duas variáveis aleatórias.

Coeficiente de correlação

O coeficiente de correlação ($\rho_{X,Y}$ ou $\rho(X,Y)$) é uma medida que também descreve o relacionamento entre variáveis aleatórias, sendo que seu valor está entre -1 e 1 . Assim:

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 < \rho_{X,Y} < 1$$

Dado que σ_X e σ_Y existem, e $\sigma_Y > 0$ e $\sigma_X > 0$

Valores próximos de ± 1 indicam forte associação linear; valores próximos de 0 indicam fraca associação linear.

$|\rho_{X,Y}| = 1$ se uma variável for função linear da outra.

EXEMPLO 3: Uma agência de seguros presta serviços a diversos clientes que compraram uma apólice residencial e outra de automóvel da mesma seguradora. Para uma apólice de automóvel as opções de indenização são representadas pela variável aleatória X , enquanto, para uma apólice residencial, as opções são caracterizadas pela variável aleatória Y . Suponha que a função de probabilidade conjunta seja dada pela tabela abaixo.

Y/X	100	250
0	0,2	0,05
100	0,10	0,15
200	0,2	0,3

Calcule a covariância e a correlação entre as variáveis.

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$E(X) = 100(0,5) + 250(0,5) = \mathbf{175}$$

$$E(Y) = 0(0,25) + 100(0,25) + 200(0,5) = \mathbf{125}$$

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mathbf{175})(Y - \mathbf{125})]$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$Cov(X, Y) = \sum_x \sum_y (X - 175)(Y - 125)P(x, y)$$

$$Cov(X, Y)$$

$$\begin{aligned} &= (100 - 175)(0 - 125)P(100, 0) + (100 - 175)(100 - 125)P(100, 100) \\ &+ (100 - 175)(200 - 125)P(100, 200) + (250 - 175)(0 - 125)P(250, 0) \\ &+ (250 - 175)(100 - 125)P(250, 100) + (250 - 175)(200 - 125)P(250, 200) \end{aligned}$$

$$Cov(X, Y) = 1875$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$E(X^2) = 100^2(0,5) + 250^2(0,5) = 36250$$

$$\mathbf{var(X) = 36250 - 175^2 = 5625}$$

$$E(Y^2) = 0^2(0,25) + 100^2(0,25) + 200^2(0,5) = 22500$$

$$\mathbf{var(Y) = 22500 - 125^2 = 6875}$$

EXEMPLO 3:

Y/X	100	250	
0	0,2	0,05	0,25
100	0,10	0,15	0,25
200	0,2	0,3	0,5
	0,5	0,5	

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1875}{\sqrt{5625} \sqrt{6875}} = 0,3015$$

EXEMPLO 4: Sejam dois indivíduos, cujo tempo de vida adicional para cada um possa ser representado pelas variáveis aleatórias T_x e T_y , respectivamente. Considere ainda que T_x e T_y possam ser modelados pela seguinte função distribuição de densidade conjunta:

$$f_{T_x, T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0006(t - s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine a correlação entre T_x e T_y

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(T_x T_y) - E(T_x)E(T_y)}{\sqrt{[E(T_x^2) - E(T_x)^2][E(T_y^2) - E(T_y)^2]}}$$

$$f_{T_x}(t) = 0,002(3t^2 - 30t + 100), \quad 0 < t < 10$$

$$f_{T_y}(s) = 0,002(3s^2 - 30s + 100), \quad 0 < s < 10$$

$$E(T_x) = \int_0^{10} t f_{T_x}(t) dt = E(T_y) = \int_0^{10} s f_{T_y}(s) ds = \mathbf{5}$$

$$E(T_x^2) = \int_0^{10} t^2 f_{T_x}(t) dt = E(T_y^2) = \int_0^{10} s^2 f_{T_y}(s) ds = \frac{\mathbf{110}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{var}(T_x) = \frac{\mathbf{110}}{\mathbf{3}} - 5^2 = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{3}} \mathbf{var}(T_y)$$

$$f_{T_x, T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0006(t-s)^2, & 0 < t < 10, 0 < s < 10 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$E(T_x T_y) = \int_0^{10} \int_0^{10} ts f_{T_x, T_y}(t, s) dt ds = \frac{50}{3}$$

$$\text{Cov}(T_x T_y) = \frac{50}{3} - 25 = -\frac{25}{3}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{-\frac{25}{3}}{\frac{35}{3}} = -\frac{5}{7}$$

EXEMPLO 5 : As variáveis aleatórias T_x e T_y são associadas ao tempo de vida de x e y , cujo modelo de probabilidade conjunto é dado por

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	0,26
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	0,24
	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,028	

- Qual o valor atuarial de um seguro feito de forma a ser pago ao final da morte de y ?
- Qual o valor atuarial para um seguro feito por y que pague a x caso ele esteja vivo ao final do ano de morte de y ?

*Considere $i = 5\%$ ao ano e $b = 1$.

EXEMPLO 5: Qual o valor atuarial de um seguro feito de forma a ser pago ao final da morte de y ?

$$A_y = \sum_{t=0}^3 v^{t+1} P(T_y = t).$$

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	0,26
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	0,24
	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,028	

$$A_y = v^1 P(T_y = 0) + v^2 P(T_y = 1) + v^3 P(T_y = 2) + v^4 P(T_y = 3)$$

$$A_y = v^1(0,25) + v^2(0,26) + v^3(0,25) + v^4(0,24) \approx \mathbf{0,88733}$$

EXEMPLO 5: Qual o valor atuarial para um seguro feito por y que pague a x um benefício $b = 1$ caso ele esteja vivo ao final do ano de morte de y ?

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	0,26
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	0,24
	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,028	

$$VPA = v^1 P(T_y = 0) P(T_x \geq 1) + v^2 P(T_y = 1) P(T_x \geq 2) + v^3 P(T_y = 2) P(T_x \geq 3) + v^4 P(T_y = 3) P(T_x \geq 4)$$

EXEMPLO 5:

T_y/T_x	0	1	2	3	4	5	
0	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
1	0,0078	0,0208	0,0416	0,0546	0,0624	0,0728	0,26
2	0,0075	0,02	0,04	0,0525	0,06	0,07	0,25
3	0,0072	0,0192	0,0384	0,0504	0,0576	0,0672	0,24
	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	

$$VPA = v^1 P(T_y = 0) P(T_x \geq 1) + v^2 P(T_y = 1) P(T_x \geq 2) + v^3 P(T_y = 2) P(T_x \geq 3) + v^4 P(T_y = 3) P(T_x \geq 4) + 0 [P(T_y = 0) P(T_x < 1) + P(T_y = 1) P(T_x < 2) + P(T_y = 2) P(T_x < 3) + P(T_y = 3) P(T_x < 4)]$$

$$VPA = v^1 0,25(0,97) + v^2 0,26(0,89) + v^3 0,25(0,73) + v^4 0,24(0,52) + 0(0,2188)$$

$$VPA \approx 0,7011626$$

Força de mortalidade

- A força de mortalidade é a taxa na qual as pessoas em uma determinada população estão morrendo em um período de tempo específico.
- Função risco $h(x)$
- Taxa de falha
- Valor pequeno para função implica em unidade exposta a menor quantidade de risco...

Força de mortalidade

- Para T_x e T_y serem independentes e esses resultados podem ser estendidos para n variáveis, o mesmo raciocínio vale para o cálculo da força de mortalidade conjunta, assim

$$\mu(x + t, y + s) = \frac{f_{T_x, T_y}(t, s)}{S_{T_x, T_y}} = \left[\frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} \right] \left[\frac{f_{T_y}(s)}{S_{T_y}(s)} \right] = \mu(x + t) \mu(y + s)$$

EXEMPLO 6: Seja o tempo de vida futuro T_x e T_y independentes, ambos com a seguinte função de densidade.

$$f_T(t) = \begin{cases} 0,02(10 - t) & 0 < t < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a força de mortalidade conjunta.

Como já visto anteriormente

$$S_{T_x, T_y}(t, s) = \begin{cases} 0,0001(10 - s)^2(10 - t)^2, & 0 < s \leq 10, 0 < t \leq 10, \\ 0,01(10 - s)^2 & 0 < s \leq 10, t < 0 \\ 0,01(10 - t)^2 & s < 0, 0 < t \leq 10 \\ 0 & s \geq 10, t \geq 10 \end{cases}$$

Então

$$S_{T_x}(t) = 0,01(10 - t)^2 \quad \text{e} \quad S_{T_y}(t) = 0,01(10 - s)^2$$

Logo

...

Como já visto anteriormente

$$\mu(x + t) = \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} = \frac{0,02(10 - t)}{0,01(10 - t)^2} = \frac{2}{10 - t}, \quad 0 < t < 10$$

$$\mu(y + s) = \frac{f_{T_y}(s)}{S_{T_y}(s)} = \frac{0,02(10 - s)}{0,01(10 - s)^2} = \frac{2}{10 - s}, \quad 0 < s < 10.$$

$$\mu(x + t, y + s) = \frac{4}{(10 - t)(10 - s)}, \quad 0 < t < 10, 0 < s < 10.$$

- **Portal Halley** : <https://atuaria.github.io/portalhalley/>
- Bowers et al. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.
- D. C. M. Dickson, M. R. Hardy and H. R. Waters. **Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks**. Cambridge University Press, 2019.
- CORDEIRO FILHO, Antônio. **Cálculo Atuarial Aplicado: teoria e aplicações, exercícios resolvidos e propostos**. São Paulo: Atlas, 2009.
- FERREIRA, P. P. **Matemática Atuarial: Riscos de Pessoas**. Rio de Janeiro: ENS, 2019
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba :CRV, 2022.

